ABI-Stoff
MATHEMATIK 2006

Übersicht

1 Analysis

1.1 Ableitungsregeln

Potenzregel:	$f(x)=x^z$	$f'(x)=z\cdot x^{(z-1)}$
Summenregel:	$f(x)=g(x)+h(x)$	$f'(x)=g'(x)+h'(x)$
Faktorregel:	$f(x)c\cdot g(x)$	$f'(x)=c\cdot g'(x)$
Kettenregel:	$f=u\circ v$	$f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)$
Produktregel:	$f=u\cdot v$	$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$
Quotientenregel:	$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$

1.2 Untersuchung von gebrochenrationalen Funktionen

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$

1. Definitionsmenge

$D_f=R \setminus \{x \mid q(x) = 0\}$

2. Symmetrie

f(-x) = -f(x) Punktsymmetrie zum Ursprung
f(-x) = f(x) Achsensymmetrie zur y-Achse

3. Polstellen

q(x) = 0
$x \rightarrow x_0: \ |f(x)| \rightarrow +\infty$

größte Hochzahl von q(x) **gerade**: **ohne VZW**
größte Hochzahl von q(x) **ungerade**: **mit VZW**

4. Verhalten für $x\rightarrow\infty$ und $x\rightarrow-\infty$

n: größte Hochzahl von p(x)
m: größte Hochzahl von q(x)

n < m:	x-Achse als Asymptote
n = m:	waagerechte Asymptote ($y=\frac{a_n}{b_m}$)
n = m+1:	schiefe Asymptote (Polynomdivision)
n > m+1:	Näherungskurve (Polynomdivision)

5. Nullstellen

p(x) = 0 und $q(x) \neq 0$
Schnittpunkt mit der x-Achse: N(x / 0)

6. Ableitungen

siehe Ableitungsregeln, manchmal ist die Ableitung der **durchdividierten Form** einfacher!

7. Extemstellen

Notwendige Bedingung:
$f'(x_0) = 0$

Hinreichende Bedingung:
VZW von f'(x) bei x_0
von (+) nach (-): lokales Maximum
von (-) nach (+): lokales Minimum
oder
$f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) > 0$: lokales Minimum
$f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) < 0$: lokales Maximum

8. Wendestellen

Notwendige Bedingung:
$f''(x_0) = 0$

Hinreichende Bedingung:
VZW von f''(x) bei x_0
oder
$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$

9. Schaubild

1.3 Das Newtonverfahren

- erlaubt die näherungsweise Bestimmung von Nullstellen einer differenzierbaren Funktion (gelten muss nur $f(a) \cdot f(b) < 0$)
- weiß man, dass im Intervall [a; b] eine Nullstelle z ist, so sucht man – eventuell mit Hilfe des Schaubildes – einen Wert der möglichst nahe bei z liegt
- schneidet man nun die Tangente im Punkt $P_0(x_0/y_0)$ mit der x-Achse, so ist die Abszisse x_1 meist ein besserer Näherungswert als der Startwert x_0
- nun verfährt man ebenso mit der Tangente im Punkt $P(x_1/y_1)$ und erhält als Abszisse x_2, ebenfalls ein besserer Näherungswert für z
- [Herleitung der **sukzessiven Interationsvorschrift** $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$]
- obwohl das Verfahren für jede differenzierbare Funktion anwendbar ist, führt es nicht immer zum Erfolg (f'(x) muss immer ungleich 0 sein, x_{n+1} muss im Definitionsbereich liegen, die richtige Nullstelle muss angelaufen werden), jedoch lässt sich dieses Problem mit dem richtigen Startwert meist lösen

1.4 Integralrechnung

1.4.1 Rechenregeln

Intervalladditivität des Integrals:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$$

Linearität des Integrals:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$ und

$$\int_a^b r\cdot f(x)dx=r\cdot\int_a^b f(x)dx$$

Abschätzbarkeit:

Ist $f(x)\leq g(x)$ für $x\in[a;b]$, dann gilt $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

1.4.2 Näherungsweise Berechnung von Integralen

Soll das Integral einer stetigen Funktion f(x) über das Intervall [a; b] bestimmt werden, so liefern folgende Verfahren meist einen guten Näherungswert:

<u>Kepler'sche Fassregel</u>: Durch den Punkt P(a / f(a)), R($\frac{a+b}{2}$ / f($\frac{a+b}{2}$)) und Q (b / f(b)) wird eine Parabel der Form g(x) = ax² + bx + c gelegt. Für das Integral erhält man dann folgenden Wert:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{1}{6}(b-a)\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

<u>Simpson Regel:</u> Erweiterung der Kepler'schen Fassregel. Anstatt durch eine einzige Parabel wird das Integral durch eine beliebige Anzahl n von Parabeln angenähert. Dabei sei h die Breite eines Abschnittes, also $h=\frac{b-a}{n}$ und $x_0=a$, $x_1=a+h$, $x_i=a+i\cdot h$

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{1}{3}h\left[(f(x_0)+f(x_n))+4(f(x_1)+f(x_3)+...+f(x_{n-1}))+2(f(x_2)+f(x_4)+...+f(x_{n-2}))\right]$$

1.4.3 Uneigentliche Integrale

Ist die Funktion f auf dem Intervall (a; b] stetig und existiert der Grenzwert $\lim_{z\to a}\int_z^b f(x)dx$, so heißt der Grenzwert das **uneigentliche Integral von f über (a; b]**.

1.4.4 Rauminhalte von Rotationskörpern

$$V=\pi\int_a^b (f(x))^2 dx$$

Zwischen zwei Kurven:

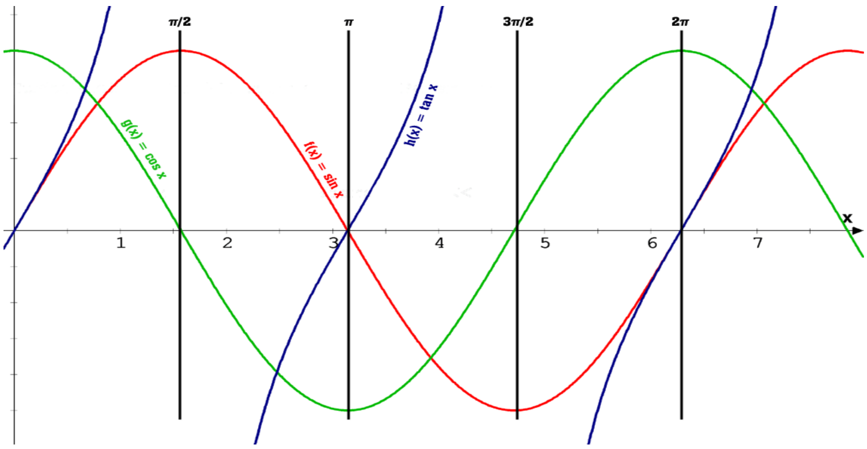
$$V=\pi\int_a^b ((u(x))^2-(v(x))^2) dx$$

1.4.5 Mittelwerte von Funktionen

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) dx$ ist Mittelwert $\overline{m}$ der Funktionswerte von f auf [a; b]

1.5 Trigonometrische Funktionen

Winkel von Grad in Bogenmaß umrechnen: $b=\frac{\pi\cdot\alpha}{180°}$



Wertetabelle:

	0°	30°	45°	60°	90°	120°
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$
Sinus	0	0,5	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
Kosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
Tangens	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$

Eigenschaften:

Funktion	***Ableitung***	***Periode***	***Definitionsmenge***	***Wertemenge***
f mit f(x) = sin(x)	f'(x) = cos x	2π	$D_f = R$	$W_f = [-1;1]$
g mit g(x) = cos(x)	g'(x) = -sin x	2π	$D_g = R$	$W_g = [-1;1]$
h mit h(x) = tan(x)	h'(x) = $\frac{1}{\cos^2 x}$	π	$D_h = R \setminus \{x \mid x = \frac{1}{2}\pi + k\pi; k \in Z\}$	$W_h = R$

Das Schaubild von f mit $\mathbf{f(x) = a \cdot sin[b(x-c)]}$ und a > 0, b > 0, $c \in R$ kann man sich aus dem Schaubild der Sinusfunktion schrittweise entstanden denken durch:

- Streckung in y-Richtung mit dem Faktor a (Amplitude),
- Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$,
- Verschiebung in x-Richtung um c.

Für die Periode p von f gilt: $p = \frac{2\pi}{b}$.

1.6 Die natürliche Exponentialfunktion

- *f(x) = e^{kx}*
- aus g(x) = a^x wird $f(x) = e^{x \cdot \ln a}$
- $x \to \infty$: $f(x) \to \infty$ (k > 0)
- $x \to -\infty$: $f(x) \to 0$ (k > 0)
- $f'(x) = e^{v(x)} \cdot v'(x)$

Potenzgesetze:

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

(2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

1.7 Die natürliche Logarithmusfunktion

- f(x) = ln x
- $f'(x) = \frac{1}{x}$
- aber $g(x) = \frac{1}{x}$ und $G(x) = \ln|x|$
- $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \to F(x) = \ln|u(x)|$

Logarithmusgesetze:
(1) ln(uv) = ln u + ln v
(2) ln(u/v) = ln u – ln v
(3) $\ln(u^k) = k \cdot \ln u$
mit $u, v \in R^+$ (!!)

1.8 Wachstum

1.8.1 Exponentielles Wachsen und Fallen

- Form: $f(t) = c \cdot e^{kt}$ c: Anfangsbestand
- Umwandlung von $f(t) = c \cdot a^t$ in $f(t) = c \cdot e^{kt}$: k = ln a
- k > 0 (bzw. a > 1): Wachstumskonstante

  $k = \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)$; Verdopplungszeit: $T_V = \frac{\ln 2}{k}$
- k < 0 (bzw. 0 < a < 1): Zerfallskonstante

  $k = \ln\left(1 - \frac{p}{100}\right)$; Halbwertszeit: $T_H = \frac{-\ln 2}{k}$
- DGL des exp. Wachstums: $f'(t) = k \cdot f(t)$
- Lösungen: $f(t) = c \cdot e^{kt}$ $c \in R \setminus \{0\}$

1.8.2 Beschränktes Wachsen und Fallen

- DGL des beschränkten Wachstums: $f'(t) = k \cdot (S - f(t))$
- Lösungen: $f(t) = S - c \cdot e^{-kt}$; c > 0: beschränktes Wachsen; c < 0 beschränktes Fallen

1.9 Folgen

1.9.1 Arithmetische Folgen

explizite Beschreibung: $(a + d \cdot n)$ mit dem Anfangswert a und der Differenz d
rekursive Beschreibung: $a_0 = a$ und $a_{n+1} = d + a_n$

1.9.2 Geometrische Folgen

explizite Beschreibung: $(a \cdot q^n)$ mit dem Anfangswert a und dem Quotienten q
rekursive Beschreibung: $q_0 = a$ und $q_{n+1} = a \cdot q^n$

1.9.3 Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Eine Aussage ist gültig für alle natürlichen Zahlen $n \in N$, wenn man nachweisen kann:

(I) Induktionsanfang: Die Aussage gilt für n = 0.

(II) Induktionsschritt: Wenn man annimmt, dass die Aussage für n = k gilt, dann kann man zeigen, dass die Aussage auch für n = k + 1 gilt.

1.9.4 Eigenschaften von Folgen

Eine Folge (a_n) heißt monoton $\begin{Bmatrix} \text{zunehmend} \\ \text{abnehmend} \end{Bmatrix}$, wenn $\begin{Bmatrix} a_{n+1} \geq a_n \\ a_{n+1} \leq a_n \end{Bmatrix}$ für jedes $n \in N$ gilt.

Man nennt eine Folge (a_n) nach $\begin{Bmatrix} \text{oben} \\ \text{unten} \end{Bmatrix}$ geschränkt, wenn es eine Zahl $\begin{Bmatrix} S \in R \\ s \in R \end{Bmatrix}$ gibt mit $\begin{Bmatrix} a_n \leq S \\ a_n \geq s \end{Bmatrix}$ für jedes $n \in N$.

Strategie bei Monotonie:

1. Vergleichen von a_{n+1} und a_n.
2. Führt 1. zu keinem Ergebnis, so untersucht man die Differenz $a_{n+1} - a_n$.
3. Führt 2. zu keinem Ergebnis, so untersucht man den Quotienten $a_{n+1} : a_n$.

Eine Zahl $g \in R$ heißt Grenzwert einer Zahlenfolge (a_n), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_0 \in N$ gibt mit der Eigenschaft, dass $|a_n - g| < \varepsilon$ ist für alle $n \geq n_0$. Man schreibt: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$.

Folgen mit Grenzwert heißen **konvergente** Folgen, während Folgen ohne Grenzwert als **divergent** bezeichnet werden.

Folgen mit Grenzwert 0 heißen **Nullfolgen**. Die Aussage, dass die Folge (a_n) den Grenzwert g hat ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass die Folge $(a_n – g)$ eine Nullfolge ist.

2 Analytische Geometrie

2.1 Lineare (Un-)Abhängigkeit

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ heißen voneinander linear abhängig, wenn mindestens einer dieser Vektoren als Linearkombination der anderen darstellbar ist.

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ sind genau dann **linear unabhängig**, wenn die Gleichung $r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + r_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$ ($r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$) genau **eine Lösung** mit $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$ besitzt.

Zwei linear abhängige Vektoren sind zueinander parallel, drei linear abhängige Vektoren liegen in einer Ebene.

2.2 Beweise mithilfe von Vektoren

1. Schritt: Man fertigt eine Zeichnung an, die die geometrischen Objekte zeigt.
2. Man stellt die Voraussetzung der zu beweisenden Aussage mithilfe von Vektoren dar.
3. Man stellt die Behauptung der zu beweisenden Aussage mithilfe von Vektoren dar.
4. Man leitet aus der Voraussetzung die Behauptung her (meist mit der geschlossenen Vektorkette)

2.3 Geraden

2.3.1 Gleichung in Parameterform

$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \qquad t \in R$

2.3.2 Gegenseitige Lage von Geraden

$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} \qquad t \in R$

$h: \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v} \qquad t \in R$

identisch	***zueinander parallel***	***schneiden sich***	***zueinander windschief***
$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear **abhängig**		$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear **unabhängig**	
$\vec{u}$ und $\vec{q}-\vec{p}$ sind linear **abhängig**	$\vec{u}$ und $\vec{q}-\vec{p}$ sind linear **unabhängig**	$\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{q}-\vec{p}$ sind linear **abhängig**	$\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{q}-\vec{p}$ sind linear **unabhängig**
unendlich viele Lösungen	**keine** Lösung	**eine** Lösung	**keine** Lösung

2.4 Ebenen

2.4.1 Ebenengleichung in Parameterform

$\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \qquad (r, s \in R)$

2.4.2 Koordinatengleichung der Ebene

$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (mindestens einer der Koeffizienten muss ungleich 0 sein)

2.4.3 Normalenform der Ebenengleichung

$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$

2.4.4 Spurpunkte und Spurgeraden

Spurpunkte sind die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen. Um die Spurpunkte zu ermitteln werden zwei Koordinaten 0 gesetzt sodass die dritte Koordinate berechnet werden kann. Am besten funktioniert dies mit der Koordinatengleichung.

Spurgeraden sind die Geraden durch die Spurpunkte. Es gibt maximal drei Spurgeraden für eine Ebene.

2.4.5 Umrechnung von Ebenen

↓ zu | von →	***Parameterform*** $\vec{x}=\vec{p}+r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}$	***Koordinatenform*** $ax_1+bx_2+cx_3=d$	***Normalenform*** $(\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n}=0$	***3 Punkte*** $A(a_1/a_2/a_3), B(b_1/b_2/b_3)$ und $C(c_1/c_2/c_3)$
Parameterform $\vec{x}=\vec{p}+r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}$		Gleichung nach x_2 auflösen, dann ergänzen: $\left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 + x_1 + 0 \\ x_2 = d' + a'x_1 + c'x_3 \\ x_3 = 0 + 0 + x_3 \end{array}\right\}$ daraus folgt: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ d' \\ 0 \end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix} 1 \\ a' \\ 0 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} 0 \\ c' \\ 1 \end{pmatrix}$	Zwei Punkte der Ebene berechnen (zwei Koordinaten von $\vec{x}$ beliebig wählen), Stützvektor als dritten Punkt nehmen und dann gleiches Verfahren wie bei 3 Punkte -> Parameterform	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}+r\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} c_1-a_1 \\ c_2-a_2 \\ c_3-a_3 \end{pmatrix}$
Koordinatenform $ax_1+bx_2+cx_3=d$	Zerlegen in $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\cdots$, r und s ersetzen meist ist es leichter, zuerst die Normalenform zu bestimmen und dann selbige in Koordinatenform umzuwandeln		$n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=d$, d wird durch Einsetzen des Stützvektors ermittelt (oder aus dem Skalarprodukt von Stütz- und Normalenvektor)	$\left\{\begin{array}{l} a_1a + a_2b + a_3c = d \\ b_1a + b_2b + b_3c = d \\ c_1a + c_2b + c_3c = d \end{array}\right\}$ d beliebig setzen, danach a, b und c ausrechnen (Koeffizienten der Koordinatengleichung)
Normalenform $(\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n}=0$	der Normalenvektor muss zu beiden Richtungsvektoren orthogonal sein: $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$ Lösen, indem eine Koordinate frei gewählt wird Stützvektor wird übernommen	Koeffizienten der Koordinatengleichung sind die Koordinaten des Normalenvektors Mit $x_2=x_3=0$ erhält man $x_1=\frac{d}{a}$ und somit den Stützvektor $\vec{p}=\begin{pmatrix} d\div a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kurz: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix} d\div a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0$		$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist Stützvektor $\vec{p}$ gelten muss zudem: $\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix}\cdot\vec{n}=0$ $\begin{pmatrix} c_1-a_1 \\ c_2-a_2 \\ c_3-a_3 \end{pmatrix}\cdot\vec{n}=0$ Lösen, indem eine Koordinate frei gewählt wird

2.4.6 Gegenseitige Lage von Ebenen

$E:\vec{x}=\vec{p}+r\vec{u}+s\vec{v}$

$E^*:\vec{x}^*=\vec{p}^*+r^*\vec{u}^*+s^*\vec{v}^*$

E und E* schneiden sich	***E und E* sind parallel***	***E und E* sind identisch***
$\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{u}^*$ oder $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{v}^*$ sind **linear unabhängig**	$\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{u}^*$ und $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{v}^*$ sind **linear abhängig**	
	$\vec{p}-\vec{p}^*,\vec{u},\vec{v}$ sind **linear unabhängig**	$\vec{p}-\vec{p}^*,\vec{u},\vec{v}$ sind **linear abhängig**
unendlich viele Lösungen (Gerade)	**keine** Lösung	**unendlich viele** Lösungen

2.4.7 Gegenseitige Lage einer Gerade und einer Ebene

$g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$

$E: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{v} + s\vec{w}$

g schneidet E	***g ist parallel zu E***	***g liegt in E***
$\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind **linear unabhängig**	$\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind **linear abhängig**	
	$\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind **linear unabhängig**	$\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind **linear abhängig**
eine Lösung	**keine** Lösung	**unendliche viele** Lösungen

2.5 Teilverhältnisse

Ist T ein Punkt der Geraden durch die Punkte A und B und gilt $\vec{AT} = t \cdot \vec{TB}$, dann nennt man die Zahl t Teilverhältnis des Punktes bezüglich der Strecke AB.

Aus $\vec{AT} = t \cdot \vec{TB}$ folgt: $\vec{AT} = \frac{t}{(1+t)} \vec{AB} \quad t \neq -1$

Ist t > 0, dann liegt T innerhalb der Strecke AB.

Ist t < 0, dann liegt T außerhalb der Strecke AB.

2.6 Länge eines Vektors

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Ein Vektor mit dem Betrag 1 nennt man Einheitsvektor.

Für $\vec{a} \neq \vec{0}$ gilt: $\vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$.

2.7 Skalarprodukt

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

Sonderfälle:

$\varphi = 0°$: die Vektoren haben gleiche Richtungen,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, für $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ und damit $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

$\varphi = 90°$: die Vektoren sind orthogonal

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\varphi = 180°$: die Vektoren haben entgegengesetzte Richtungen

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

Koordinatenform des Skalarprodukts:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=a_1b_2+a_2b_2+a_3b_3$$

2.8 Hesse'sche Normalenform

Ist $(\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n}_0=0$ die Hesse'sche Normalenform einer Gleichung der Ebene E, so gilt für den Abstand d eines Punktes R mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ von der Ebene E:

$$d=|(\vec{r}-\vec{p})\cdot\vec{n}_0|$$

Oder:

$$d=\left|\frac{a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3-b}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\right|$$

Herleitung:

$$\cos\varphi=\frac{d}{|\vec{PR}|}$$

$$(1):\ d=\cos\varphi\cdot|\vec{PR}|$$

$$(2):\ \cos\varphi=\frac{\vec{n}\cdot\vec{PR}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{PR}|}$$

$$(2)\ \text{in}\ (1):$$

$$d=\frac{\vec{n}\cdot\vec{PR}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{PR}|}\cdot|\vec{PR}|=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\cdot\vec{PR}=\boldsymbol{\vec{n}_0\cdot\vec{PR}}$$

2.9 Abstände

2.9.1 Abstand zweier Punkte

$$d=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

2.9.2 Abstand Punkt R – Gerade g

$$g:\vec{x}=\vec{p}+t\cdot\vec{u}$$

<u>Möglichkeit 1:</u>

1. Schritt: Orthogonale Hilfsebene E zur Geraden ermitteln (**in Normalenform**) :
   - Richtungsvektor der Geraden ist Normalenvektor der Hilfsebene E
   - Ortsvektor von P ist Stützvektor der Hilfsebene E
2. Schritt: Lotfußpunkt F der Geraden g mit E ausrechnen
3. Schritt: Betrag von $\vec{RF}$ berechnen

Möglichkeit 2:

Der Lotfußpunkt F liegt auf der Geraden g, d.h. es gilt:

$F(p_1+t\cdot u_1 \;/\; p_2+t\cdot u_2 \;/\; p_3+t\cdot u_3)$

Die Gerade g und damit der Richtungsvektor ist orthogonal zum Lotvektor $\vec{RF}$, ihr Skalarprodukt ist also 0:

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}f_1-r_1\\f_2-r_2\\f_3-r_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p_1+t\cdot u_1-r_1\\p_2+t\cdot u_2-r_2\\p_3+t\cdot u_3-r_3\end{pmatrix}=0$$

t muss nun ausgerechnet werden und gibt den Lotfußpunkt an.

Der Betrag von $\vec{RF}$ ist der Abstand.

2.9.3 Abstand Punkt P – Ebene E

1. Schritt: Aufstellen einer Gleichung der zu E orthogonalen Geraden durch P, der so genannten Lotgeraden,
2. Schritt: Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes F der Lotgeraden mit der Ebene E,
3. Schritt: Berechnung des Abstandes als Betrag des Vektors $\vec{PF}$.

oder mit HNF

$$d=\left|\frac{a_1 r_1+a_2 r_2+a_3 r_3-b}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\right| \quad \text{bzw.} \quad d=|(\vec{r}-\vec{p})\cdot\vec{n}_0|$$

2.9.4 Abstand windschiefer Geraden

Einheitsvektor $\vec{n}_0$ ermitteln, der orthogonal zu $\vec{u}$ und zu $\vec{v}$ ist.

$d=|(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{n}_0|$, wobei $\vec{p}$ und $\vec{q}$ die Stützvektoren der Geraden sind.

2.10 Schnittwinkel

zwei Geraden: $\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

Gerade und Ebene: $\sin\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}$

zwei Ebenen: $\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$

3 Nachträgliche Korrekturen

- 09.03.2006 – S. 6 / 1.5: Rechtschreibkorrektur („Cosinus“ > „Kosinus“)
- 09.03.2006 – S. 12 / 2.4.5: Umrechnung Parameterform in Normalenform („Richtungsvektor wird übernommen“ > „Stützvektor wird übernommen“)
- 10.03.2006 – S. 11 / 2.4.2: „a, b, c $\neq$ 0“ > „mindestens einer der Koeffizienten muss ungleich 0 sein“
- 10.03.2006 – S. 12 / 2.4.5: Umrechnung Koordinaten in Parameterform (x2 in x3 umbenannt)
- 11.03.2006 – S. 3 / 1.2: Symmetrie korrigiert: $f(-x) = -f(x)$ für Punktsymmetrie zum Ursprung
- 11.03.2006 – S. 6 / 1.5: Bogenmaß von 0° ist 0, nicht 1
- 27.03.2006 – S. 5: NEU Näherungsweise Berechnung von Integralen
- 27.03.2006 – S. 8: Logistisches Wachstum entfernt
- 27.03.2006 – S. 8: Ergänzung beim exponentiellen Wachstum